2次関数の、2次方程式の解について

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

⟸ $y = ax^2 + bx + c$ が最小 または最大となる点を頂点といい、

$$\boxed{\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}$$ と表される。

さらに、$y = 0$ のとき、$ax^2 + bx + c = 0$ --- 2次方程式という。

この解を求める。そのためには、因数分解する。

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$ aで割る $(a \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

∴ 解は $x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

よって、$\boxed{\text{解の公式} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

○判別式について

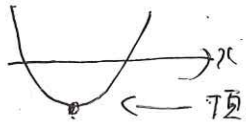
頂点は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の $\boxed{\text{判別式 } D=b^2-4ac}$

・$a>0$ の時、

頂点のy座標は $-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$

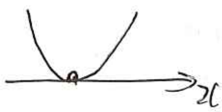
もし、$D>0$ なら、$-\frac{D}{4a}<0$ ⇒



← 頂点がx軸より下

∴ x軸とグラフの交点は2個!!

$D=0$ なら、$-\frac{D}{4a}=0$、⇒



接する∴ 交点が1個、

$D<0$ なら、$-\frac{D}{4a}>0$ ⇒

← 頂点はx軸より上にある。

∴ x軸とグラフの交点なし。