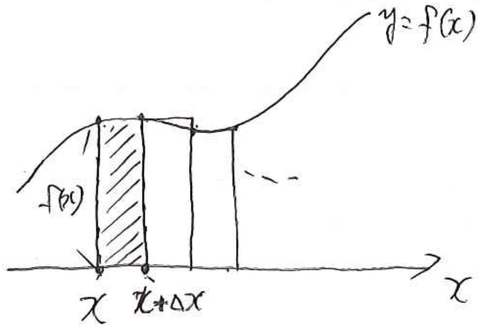
積分について

「積分」は「微分」の逆で、面積を求めること。

長方形の面積を足していくと、全体の面積になる。

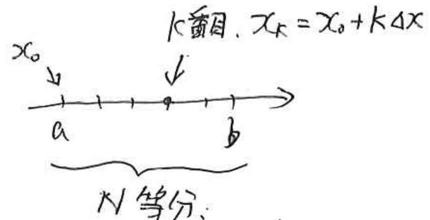
$\to f(x)\cdot\Delta x = \Delta S$



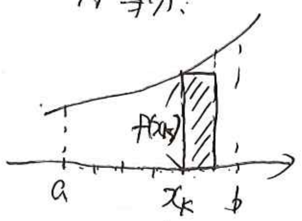
これを区間 $a \leqq x \leqq b$ まで集めると、$S = \int f(x)dx$。

a から b までの区間を N 等分すると、$\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ となる。

$x_0 = a$ とすると、k 番目の点は $x_k = a + k\Delta x$
$= x_0 + k\Delta x$。



k 番目の長方形は $S_k = f(x_k)\Delta x = f\left(x_0 + \frac{k}{N}(b-a)\right)\Delta x$.



特に、$a=0$, $b=1$ とすると

$S_k = f\left(\frac{k}{N}\right)\cdot\frac{1}{N}$、となるので、

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$$ となる。

微分との関係は、何か？

微分は $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ であった。

この $f'(x)$ を積分すると、$f(x)$ に戻るか？

$$\sum_{k=0}^{N-1} f'(x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k+\Delta x) - f(x_k)}{\Delta x} \Delta x$$

$$= \cancel{f(x_0+\Delta x)} - f(x_0) + \cancel{f(x_0+2\Delta x)} - \cancel{f(x_0+\Delta x)} + f(x_0+3\Delta x) - \cancel{f(x_0+2\Delta x)}$$

$$+ \cdots + \cancel{f(x_0+(N-1)\Delta x)} - \cancel{f(x_0+(N-2)\Delta x)} + f(x_0+N\Delta x) - \cancel{f(x_0+(N-1)\Delta x)}$$

$$= f(x_0+N\Delta x) - f(x_0)$$

$$= f(b) - f(a).$$

これは、つまり $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ ということ。