$\boxed{\text{IV}}$ $f(x) = x\sin^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ このとき $f'(x) = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x$

(1) 曲線 $y = f(x)$ と接線 l の接点が $(t, f(t))$ より、

接線 l の方程式は $l: y = f'(t)(x-t) + f(t)$ である。

これが原点を通るので、$x=0, y=0$ を代入して、

$$f'(t)\cdot(-t) + f(t) = 0, \quad \therefore\ tf'(t) = f(t)$$

また、$f'(t) = \sin^2 t + 2t\sin t\cos t$ より、

$tf'(t) = t(\sin^2 t + 2t\sin t\cos t) = t\sin^2 t + 2t^2\sin t\cos t$ であるから

$$tf'(t) = f(t) \iff \underline{t\sin^2 t} + 2t^2\sin t\cos t = \underline{t\sin^2 t}$$

$$\iff 2t^2\sin t\cos t = 0 \qquad \therefore\ t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

条件より「lは軸でない」ので、$f'(t)=0$ となる $t=0, \pi$ は不適。よって $t=\frac{\pi}{2}$

(2)

$$\int f(x)\,dx = \int x\sin^2 x\,dx = \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int x(\sin 2x)'\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

$$= \frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) + C \qquad (C:\text{積分定数})$$

(3). (1)より $f'(x) = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin x(\sin x + 2x\cos x)$.

接線と$f(x)$の交点を求める。接線は$y=x$.

$f'(t)x = x\sin^2 x \Leftrightarrow f'(\frac{\pi}{2})x = x\sin^2 x$

$\Leftrightarrow x = x\sin^2 x$. ~~この点を$x=p$とおく~~.

$\Leftrightarrow x(1-\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow x\cos^2 x = 0$ $\quad x=0, \frac{\pi}{2}$

面積Sは

$$S = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ x\sin^2 x - x \} dx \right|$$ ((2)の結果を使う)

$$= \left| \left[\frac{1}{8}(2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0} - \frac{1}{8}(\cos\pi - \cos 0) - \frac{\pi^2}{8} \right|$$

$$= \left| \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{8} - \frac{\pi^2}{8} \right| = \left| -\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{\pi^2 - 4}{16} < 0 \right)$$