Ⅲ

$$y=\frac{2^{x^2}}{5^{3x}}\quad(x\geqq 0)$$

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\ln a.$$

(1) 上の関数をxで微分して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\ln 2\cdot 2^{x^2}\cdot 2x\cdot 5^{3x}-2^{x^2}\cdot 5^{3x}\ln 5\cdot 3}{5^{6x}}$$

$$=\frac{2^{x^2}(2x\ln 2-3\ln 5)}{5^{3x}}$$

yが最小となるとき、$\frac{dy}{dx}=0$より、 $2x\ln 2-3\ln 5=0$

今、2^{x^2}, 5^{3x}, >0より
$2x\ln 2=3\ln 5$ だけ
考えれば良い

$$\therefore\ x=\frac{3\ln 5}{2\ln 2}=\frac{3\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}e}}{2\frac{\log_{10}2}{\log_{10}e}}=\frac{3\log_{10}\frac{10}{2}}{2\log_{10}2}$$

$$=\frac{3(\log_{10}10-\log_{10}2)}{2\log_{10}2}=\frac{3(1-\log_{10}2)}{2\log_{10}2}$$

(2) $\frac{2^{x^2}}{5^{3x}}>1000$ となる最小の正の整数 xを求める

$\frac{2^{x^2}}{5^{3x}}>1000$ の常用対数(底が10の対数)をとると、

左辺は $\log_{10}\frac{2^{x^2}}{5^{3x}}=\log_{10}2^{x^2}-\log_{10}5^{3x}=x^2\log_{10}2-3x\log_{10}5$

右辺は $\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3\log_{10}10=3$、 より

$x^2\log_{10}2-3x\log_{10}5-3>0$. 〈 ここで、$\log_{10}2=0.301$ を使える形にする。

$\Leftrightarrow\ x^2\log_{10}2-3x\log_{10}\frac{10}{2}-3=x^2\log_{10}2-3x(1-\log_{10}2)-3>0.$

$\Leftrightarrow\ 0.3x^2-0.7\times 3x-3>0.\ \Leftrightarrow\ x^2-7x-10>0$

$x^2-7x-10=0$
$\to x=\frac{7\pm\sqrt{49+40}}{2}$
$=\frac{7\pm\sqrt{89}}{2}$

$x<\frac{7-\sqrt{89}}{2}$, $\boxed{\frac{7+\sqrt{89}}{2}<x}$ これを満たす最小のxは

こっちだけ。

$9^2<89<10^2\to 9<\sqrt{89}<10\to 16<7+\sqrt{89}<17\to 8<\frac{7+\sqrt{89}}{2}<8.5$ $\therefore\ x=9$

Giuris