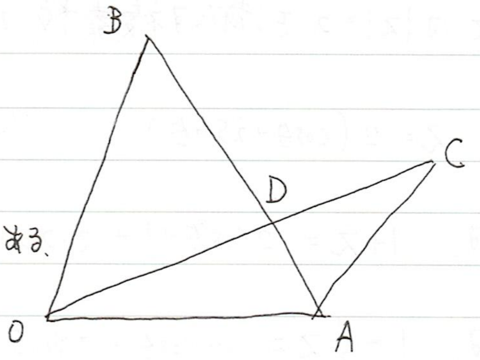
No.
Date

H29 数コースII

[II] 問1、

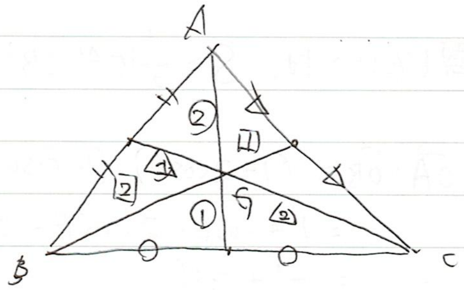
条件(i) $\vec{OC} = x\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$

条件(ii) 三角形OACの重心Gは線分AB上にある。



目標：xの値を求めること。
$\vec{OG}$を$\vec{OA}$と$\vec{OB}$で表すこと。

まず、重心がどのような点か思い出す。
重心は、それぞれの辺の中点と~~結~~
その反対側の頂点を結んだときの交点。



問題では、条件(ii)により、線分AB上に重心があり、これはOD=CDであることを表す。

よって、$\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{x}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$

また、点Dは線分AB上にあるので、$\vec{AD} = k\vec{AB}$となっている。

$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{OA} + \vec{OB}$ 、により、

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} = -k\vec{OA} + k\vec{OB}$ ∴ $k = \frac{1}{4}$、このとき $\frac{x}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$ ⇒ $x = \frac{3}{2}$

よって、$\vec{OC} = \frac{3}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$ 、となるので、

$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{5}{6}\vec{OA} + \frac{1}{6}\vec{OB}$ となる。

OA=1、OB=2、∠AOB=60°のとき、

$|\vec{OG}|^2 = \frac{1}{6^2}\cdot\left(25\cdot|\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 + 5\cdot2\cdot\vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)$

$= \frac{1}{6^2}\cdot\left(25 + 4 + 10\cdot2\cdot\underbrace{\cos60°}_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{39}{6^2}$ ∴ $OG = \frac{\sqrt{39}}{6}$

問2. zは$|z|=2$を満たす複素数より

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$$

点Aは $1+z=1+2\cos\theta+2i\sin\theta=\alpha$ とおく

点Bは $1-\frac{1}{2}z=1-\cos\theta-i\sin\theta=\beta$ とおく.

よって三角形OABの面積を求めると、

$$\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})|=\frac{1}{2}\cdot|\mathrm{Im}((1+z)(1-\tfrac{1}{2}\bar{z}))|$$

$$1-\frac{1}{2}z\bar{z}+z-\frac{1}{2}\bar{z}$$

$$=1-1+2\cos\theta+2i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta$$

$$=\cos\theta+3i\sin\theta.$$

よって $\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})=3\sin\theta$, $\therefore S=\frac{3}{2}\cdot|\sin\theta|$ これは $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ のとき最大.

$OA=OB$ のとき、$OA^2=(1+z)(1+\bar{z})=5+z+\bar{z}=5+4\cos\theta$,

$OB^2=(1-\frac{1}{2}z)(1-\frac{1}{2}\bar{z})=1+\frac{1}{4}\cdot 4-\frac{1}{2}(z+\bar{z})=2-2\cos\theta$、より

$5+4\cos\theta=2-2\cos\theta \Leftrightarrow 6\cos\theta=-3$ 　 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,

$$\therefore \theta=\pm\frac{2}{3}\pi$$

このとき、$|1+z|=|1-\frac{1}{2}z|=\sqrt{3}$ 　 さらに、$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$1+z=1+2\cdot(-\frac{1}{2})\pm 2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm i\sqrt{3}$、より $\arg(1+z)=\pm\frac{\pi}{2}$

$1-\frac{1}{2}z=1-(-\frac{1}{2})\mp i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\mp i\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\mp i\frac{1}{2})$ より $\arg(1-\frac{1}{2}z)=\mp\frac{\pi}{6}$

$$\cos(\arg(1-\tfrac{1}{2}z))=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\arg(1-\tfrac{1}{2}z))=\mp\frac{1}{2}$$