III 、すべての正の実数xに対して、不等式

$$\frac{\log 3x}{4x+1} \leqq \log\left(\frac{2kx}{4x+1}\right) \quad \cdots ①$$

が成り立つような正の実数kの値の範囲を求める。

(1) ①を変形すると、

$$\frac{\log 3x}{4x+1} \leqq \log k + \log 2x - \log(4x+1)$$

$$\to \log k \geqq \frac{\log 3x}{4x+1} - \log 2x + \log(4x+1) \quad \cdots ②$$

(解答は選択肢(せんたくし)の形に合わせる)

②の右辺を微分すると、

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(4x+1) - \log 3x \cdot 4}{(4x+1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{4}{4x+1}$$

$$= \frac{4 + \frac{1}{x} - 4\log 3x - (4x+1)^2\frac{1}{x} + 4(4x+1)}{(4x+1)^2}$$

$$= \frac{4 + \cancel{\frac{1}{x}} - 4\log 3x - \cancel{16x} - 8 - \cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{16x} + 4}{(4x+1)^2}$$

$$= \frac{-4\log 3x}{(4x+1)^2}$$

(2) $g'(x)$は、$x=\frac{1}{3}$のとき $g'(x)=0$ となる。

$0<x<\frac{1}{3}$のとき $g'(x)>0$、$\frac{1}{3}<x$では $g'(x)<0$ となるので、

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗		↘

$g(x)$は区間$0<x<\frac{1}{3}$で増加し、区間$\frac{1}{3}<x$で減少する。

$x=\frac{1}{3}$のとき、$g(x)$は最大となる。