NO.
DATE

H29 コースII 第2回

IV 問1.

漸化式 $a_1 = 18$, A $\boxed{a_{n+1} - 12a_n + 3^{n+2} = 0}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

このパターンの漸化式では、A を 3^{n+1} で割ることで、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - 12 \cdot \frac{a_n}{3^{n+1}} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - 4 \cdot \frac{a_n}{3^n} + 3 = 0$$ と変形する。

ここで、$b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと、$\{b_n\}$ は

$b_1 = \dfrac{a_1}{3} = 6$, $\boxed{b_{n+1} - 4b_n + 3 = 0}$ B $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ を満たす。

B を変形すると、$b_{n+1} - 1 = 4(b_n - 1)$ と変形できるので、

$c_n = b_n - 1$ とおくと、この式は、

$\boxed{c_1 = b_1 - 1 = 5}$, $\boxed{c_{n+1} = 4c_n}$ となり、これは初項5, 公比4の等比数列を表す。

よって、$c_n = 5 \cdot 4^{n-1}$ となり、$c_n = b_n - 1$ より

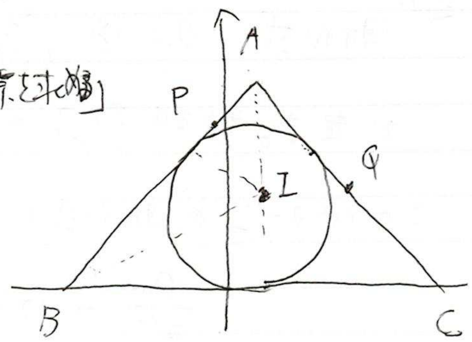
$b_n = c_n + 1 = 5 \cdot 4^{n-1} + 1$.

$a_n = 3^n b_n = 3^n (5 \cdot 4^{n-1} + 1)$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ となる。

NO.

DATE

問2.



この問題の目標：「三角形ABCの内接円の半径と、Aの座標を求める」

条件①：「辺ABは点P(−1,5)を通る」

条件②：「辺ACは点Q(3,3)を通る」

条件③「AB＝AC」　条件④「△ABCは二等辺三角形」

条件⑤「Iは内接円の中心」

2点A,Bを通る直線をl_1、点A,Cを通る直線をl_2とする。l_1の傾きをaとすると、

l_1：$y-5=a(x+1)$　∴ $y=ax+a+5$

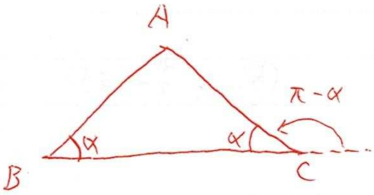
（条件①より）

l_2：$y-3=-a(x-3)$　∴ $y=-ax+3a+3$

傾きが$-a$なのは、条件④より、

$\tan\alpha=a$ なので、ACの傾きは $\tan(\pi-\alpha)$

$=-\tan\alpha=-a$.



内接円の中心をIとおくと、半径rのときは、y座標がr、

x座標はBとCの中点であるから、まずはBとCの座標を求める。

Bは、l_1で$y=0$として　$a(x+1)=-5$、∴ $x=-\frac{5}{a}-1$

Cは、l_2で$y=0$として　$-a(x-3)=-3$　∴ $x=\frac{3}{a}+3$、より、

$$x_I=\frac{-\frac{5}{a}-1+\frac{3}{a}+3}{2}=-\frac{1}{a}+1 \quad ∴ I\left(1-\frac{1}{a}, r\right)$$

これより、内接円の式は　$\left(x-1+\frac{1}{a}\right)^2+(y-r)^2=r^2$

l_1とIの距離はrなので、点と直線の距離の公式より

$$r=\frac{\left|a\left(1-\frac{1}{a}\right)-r+a+5\right|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|2a-r+4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{(r-2(a+2))^2}{a^2+1}$$

式を整理して、 $(a^2+1)r^2 = r^2 - 4(a+2)r + 4(a+2)^2$

$$\Leftrightarrow \quad a^2r^2 + 4(a+2)r - 4(a+2)^2 = 0$$

$$r = \frac{-2(a+2) \pm \sqrt{4(a+2)^2 + 4a^2(a+2)^2}}{a^2} = \frac{-2(a+2) \pm \sqrt{4(a+2)^2(a^2+1)}}{a^2}$$

$$= \frac{(2a+4)(-1 \pm \sqrt{a^2+1})}{a^2} \Rightarrow \frac{(2a+4)(-1+\sqrt{a^2+1})}{a^2} \qquad (r>0)$$

$$r = \frac{(2a+4)(-1+\sqrt{a^2+1})}{a^2} = \frac{(2a+4)(a^2+1-1)}{a^2(1+\sqrt{a^2+1})} = \frac{2a+4}{1+\sqrt{a^2+1}}$$

・$r=\frac{5}{2}$のとき、 $\frac{5}{2} = \frac{2a+4}{1+\sqrt{a^2+1}}$, より

$$5(1+\sqrt{a^2+1}) = 4a+8 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{a^2+1} = 4a+3$$

$$\Leftrightarrow \quad 5^2(a^2+1) = (4a+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 25a^2+25 = 16a^2+24a+9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9a^2-24a+16=0 \quad \Leftrightarrow \quad (3a-4)^2=0. \quad \therefore \ a=\frac{4}{3}.$$

Aの座標は、$A\left(1-\frac{1}{a},\ 2a+4\right)$ より。 ($y=a(x+1)+5$ に $x=1-\frac{1}{a}$ を代入)

$a=\frac{4}{3}$を代入して、

$$A\left(\frac{1}{4},\ \frac{20}{3}\right)$$

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $2\cdot\frac{4}{3}+4=\frac{20}{3}$