NO.

DATE

H28 EJU 第2回 数コースII.

$\boxed{IV}$ 問1.

$2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \leqq 0$ …① , $f(x) = (\log_3 x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{9}\right)$ …②

の最大値.

①で、底を3に変換すると、 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$2(\log_3 x)^2 - 9\log_3 x + 9 \leqq 0.$

$(\log_3 x - 3)(2\log_3 x - 3) \leqq 0$ $\quad\therefore\quad \frac{3}{2} \leqq \log_3 x \leqq 3.$

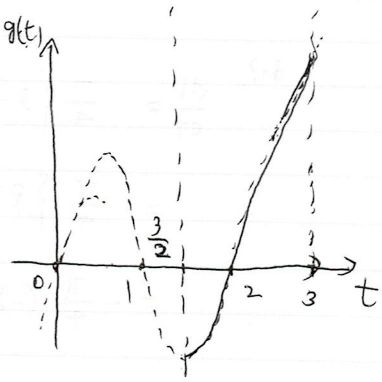
$\Leftrightarrow \log_3 3^{\frac{3}{2}} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 3^3$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \leqq x \leqq 27.$

$\log_3 x = t$ とおくと、 $\frac{3}{2} \leqq t \leqq 3.$

また、②をtで表すと、 $g(t) = t(\log_3 x - \log_3 3)(\log_3 x - \log_3 9)$

$= t(t-1)(t-2)$



$g'(t) = (t-1)(t-2) + t(t-2) + t(t-1)$

$= 3t^2 - 6t + 2.$

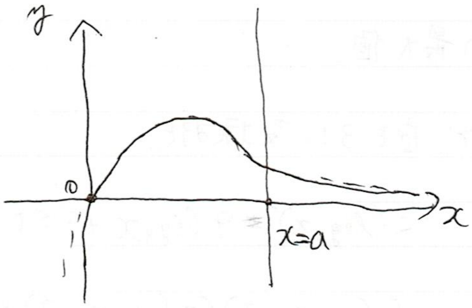
$= (\cancel{\qquad})(\cancel{\qquad})$

$g'(t) = 0$ のとき、 $t = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

図より、$t = 3$, すなわち $x = 27$ のとき、最大値 $g(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ をとる.

問2. $a>0$, $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$ とx軸、x軸上の点$A(a,0)$を通る直線$x=a$で囲まれた部分を、x軸のまわりに1回転させてできる体積を求める。

①.まずは、グラフの大体の形を描く。



$y=\sqrt{x}\,e^{-x}$ は、$x=0$で$y=0$, $x\to\infty$で0に収束するので、右のようになる。

よって、

(1) $$V=\int_0^a \pi\left(\sqrt{x}\,e^{-x}\right)^2 dx=\pi\int_0^a xe^{-2x}dx=\pi\int_0^a x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'dx$$

部分積分

$$=\pi\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^a+\pi\int_0^a\frac{1}{2}e^{-2x}dx=-\frac{\pi a}{2}e^{-2a}+\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^a$$

$$=-\frac{\pi a}{2}e^{-2a}-\frac{\pi}{4}e^{-2a}+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{4}\left\{(2a+1)e^{-2a}-1\right\}$$

(2) 点Aの速度が$4t$より. $\frac{da}{dt}=4t$. $a=2t^2$ ($t=0$のとき, $a=0$)

よって、

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{\pi}{4}\left\{2\frac{da}{dt}e^{-2a}+(2a+1)\cdot(-2)\frac{da}{dt}e^{-2a}\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{4}\left\{8te^{-2a}-8t\cdot(4t^2+1)e^{-2a}\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{4}\cdot(-8t)\cdot4t^2e^{-2a}=8\pi t^3e^{-4t^2}$$

この変化率が最も大きくなるのは、

$$\frac{d^2V}{dt^2}=8\pi\cdot\left(3t^2e^{-4t^2}+t^3\cdot(-8t)e^{-4t^2}\right)$$

$$=8\pi\cdot t^2e^{-4t^2}(3-8t^2)=0$$ より $t^2=\frac{3}{8}$ ∴ $t=\frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき。

このとき $a=\frac{3}{4}$ より

$$V=-\frac{\pi}{4}\cdot\left\{\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}}-1\right\}=-\frac{\pi}{8}\left(5e^{-\frac{3}{2}}-2\right)$$