14. $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ の2つの解がα,β。

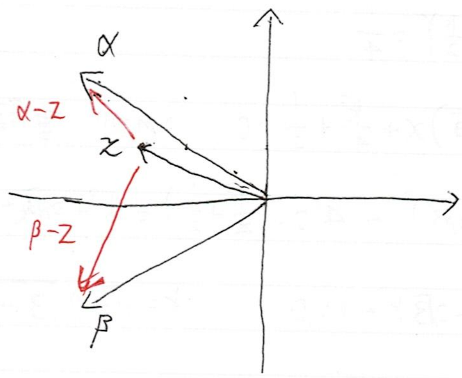
$$x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm i\frac{1}{2}=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi,=e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

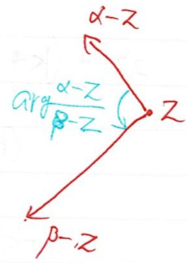
または $\cos\frac{7}{6}\pi+i\frac{7}{6}\pi=e^{i\frac{7}{6}\pi}$

条件より、$0<\arg\alpha<\arg\beta<2\pi$　∴ $\arg\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\arg\beta=\frac{7}{6}\pi$

また、条件① $\arg\frac{\alpha-z}{\beta-z}=\frac{\pi}{2}$ を用いると、

$\frac{\alpha-z}{\beta-z}$ は、右のようなベクトルの割り算。





$\arg\frac{\alpha-z}{\beta-z}$ は $\alpha-z$ と $\beta-z$ のなす角のこと。

よって、①は、$\angle APB=90^\circ$ を表す。
($\angle APB=\frac{\pi}{2}$)

よって、点Pは$Re((\alpha-z)(\bar{\beta}-\bar{z}))=0$、を満たす z 上にある。　$\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$.
$z=x+iy$ とおくと、

⇔ $(\alpha-z)(\bar{\beta}-\bar{z})=0$

⇔ $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}+i\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-i\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)$

∴ $Re[(\alpha-z)(\bar{\beta}-\bar{z})]=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0$、を満たす$z$上を、点Pは動く。

これは中心 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 半径 $\frac{1}{2}$ の円上。

条件② $(1+i)z+(1-i)\bar{z}+k=0$ は、

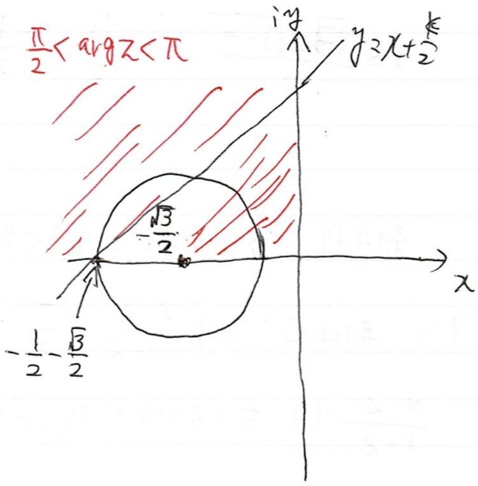
$(1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy)+k=0$

⇔ $2x-2y+k=0$　∴ $y=x+\frac{k}{2}$　傾き1、虚軸との交点$\frac{1}{2}ki$、

次に、①,②③を同時に満たす複素数zの個数について、

複素平面上で、円 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ の円周上で

直線 $y=x+\frac{k}{2}$ を満たす (x,y) の個数と同じ。



⇒「円と直線の交点を求める」ただし、右図の斜線の範囲。

$y=x+\frac{k}{2}$ を円の方程式に代入して、

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$2x^2+(k+\sqrt{3})x+\frac{k^2}{4}+\frac{1}{2}=0$ これが重解をもつとき、

$$(k+\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+\frac{1}{2}\right)=k^2+2\sqrt{3}k+3-2k^2-4$$

$=-k^2+2\sqrt{3}k-1=0$, $k=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

円と直線が $x<0, y>0$ で接するとき、$k=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,

また、円と直線が2つの交点をもつような最小のkは、$(x,y)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ を直線が通るとき。

$$k=2y-2x=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}.$$

よって、求めるkの範囲は $1+\sqrt{3}<k<\sqrt{2}+\sqrt{3}$.