H28 EJU 第2回 数コースII

IV. $a_1=1,\ a_2=10.$

$$(a_n)^2 a_{n-2} = (a_{n-1})^3 \quad (n=3,4,\cdots) \cdots ①$$

目標:「$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めること」

①の常用対数(底が10の対数)を考えると、

$$\log_{10}(a_n)^2 a_{n-2} = \log_{10}(a_{n-1})^3$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(a_n)^2 + \log_{10} a_{n-2} = 3\log_{10} a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{10} a_n + \log_{10} a_{n-2} = 3\log_{10} a_{n-1}$$ となる。, $b_n = \log_{10} a_n$ とおくと.

$2b_n + b_{n-2} = 3b_{n-1}$ より、この特性方程式 $2x^2+1=3x$ を解くと.

$$2x^2-3x+1=0 \quad (2x-1)(x-1)=0.$$

$$x=\frac{1}{2},\ 1.$$

これより、b_n の漸化式は

$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}(b_{n-1}-b_{n-2})$ または $b_n - \frac{1}{2}b_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{2}b_{n-2}$ と変形できる.

解答欄に合う方を選ぶ.

ここで、$b_2 - b_1 = \log_{10}10 - \log_{10}1 = 1$ より $(b_1 = \log_{10}1 = 0,\ b_2 = \log_{10}10 = 1)$

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b_2-b_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$

$$左辺 = (\cancel{b_2}-b_1)+(\cancel{b_3}-\cancel{b_2})+\cdots+(b_n-\cancel{b_{n-1}}) = b_n - b_1 = b_n.$$

$$右辺 = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} = \frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$\therefore\ b_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ よって $\log_{10} a_n = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$$a_n = 10^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 10^2 = 100.$$