NO.

DATE

H27 第1回 EJU 数コースII

四 問1 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$60°$ → $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°$
$=1$.

$\vec{u}$と$\vec{v}$のなす角が$30°$より

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{u}||\vec{v}|$ ∴ $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\frac{3}{4}|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$

また、$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}-\vec{b})=x^2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=x^2-4$ より

$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(x^2-4)^2=x^4-8x^2+16$,

$|\vec{u}|^2=(x\vec{a}+\vec{b})^2=x^2|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+2x+4$

$|\vec{v}|^2=(x\vec{a}-\vec{b})^2=x^2|\vec{a}|^2-2x\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2-2x+4$

よって、 $x^4-8x^2+16=\frac{3}{4}(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=\frac{3}{4}\left[(x^2+4)^2-4x^2\right]$

$=\frac{3}{4}\left[x^4+4x^2+16\right]$

→ $4x^4-4\cdot 8x^2+4\cdot 16=3x^4+3\cdot 4x^2+3\cdot 16$

→ $x^4-44x^2+16=0$.

⇔ $(x^2-4)^2=36x^2=(6x)^2$. これより、$x=-3\pm\sqrt{9+4}=-3\pm\sqrt{13}$

⇔ $[x^2-4+6x][x^2-4-6x]=0$. または $x=3\pm\sqrt{9+4}=3\pm\sqrt{13}$

$x>1$ より、 $x=3+\sqrt{13}$.

NO.

DATE

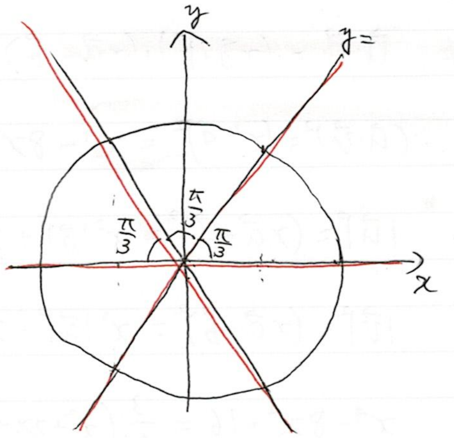
問2、(1) z^3が実数となる複素数zを考える。

$z^3 = re^{i3\theta} = r(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ が実数 ⇒ $\sin 3\theta = 0$. $3\theta = k\pi$. (k:整数)

よって、zの偏角は $\theta = \arg z = \frac{\pi}{3}k$.

これを満たすzが描く図形は、

$y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$.



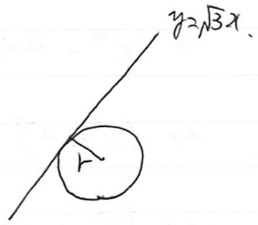
$|z-1-i| = r$ が表す図形は、

中心 $1+i$, 半径rの円である。

この中心に最も近いのは$y=\sqrt{3}x$

よって、C上で $|z-1-i|=r$ を満たすzがただ1つだけ存在するとき、

$y=\sqrt{3}x$と、中心$(1,1)$の距離がrとなる。



よって $r = \frac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

円の式は $(x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}$, より $y=\sqrt{3}x$との交点を求めると、

$$(x-1)^2+(\sqrt{3}x-1)^2 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}$$

$$4x^2-(2+2\sqrt{3})x+2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 4x^2-2(1+\sqrt{3})x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2-4-2\sqrt{3}}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

$$y = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\sqrt{3} \quad \therefore\ z = \frac{1+\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3}i)$$