$\boxed{\text{I}}$

問 1　xの 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots ①$$

を考える。関数 ① は $x = 1$ のとき最大値 16 をとり, そのグラフは x軸と 2 点で交わり, その 2 点を結ぶ線分の長さを 8 とする。このとき, a, b, c の値を求めよう。

条件より, ① は

$$y = a(x - \boxed{\text{A}})^2 + \boxed{\text{BC}}$$

と表すことができる。また, ① のグラフと x軸が交わる 2 点の座標は

$$\left(-\boxed{\text{D}}, 0\right), \quad \left(\boxed{\text{E}}, 0\right)$$

である。

したがって, $a = \boxed{\text{FG}}$ である。よって

$$b = \boxed{\text{H}}, \quad c = \boxed{\text{IJ}}$$

である。

問 2　箱の中に 0 から 9 までの数字が書かれたカードが, それぞれ 1 枚ずつ, 計 10 枚入っている。この箱の中から 3 枚のカードを次の 2 通りの方法で取り出す。このとき, 次の確率について考える。

(1) 3 枚のカードを同時に取り出す。このとき

(a) 3 枚のカードに書かれた数が, すべて 2 以上 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{LM}}}$ である。

(b) 最も小さい数が 2 以下で, 最も大きい数が 8 以上である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{NO}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(2) 1 枚のカードを取り出し, 数字を見てから元の箱に戻す試行を 3 回続ける。このとき, 最も小さい数が 2 以上で, 最も大きい数が 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$

正の数からなる数列 $a_1, a_2, a_3 \cdots$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 10, \quad (a_n)^2 a_{n-2} = (a_{n-1})^3 (n = 3, 4, \cdots) \qquad \cdots ①$$

を満たしている。このとき, $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう。

① の両辺の常用対数を考えて

$$\boxed{\text{A}} \log_{10} a_n + \log_{10} a_{n-2} = \boxed{\text{B}} \log_{10} a_{n-1}$$

を得る。いま, $b_n = \log_{10} a_n (n = 1, 2, \cdots)$ とおくと, この式は

$$\boxed{\text{A}}\, b_n + b_{n-2} = \boxed{\text{B}}\, b_{n-1} \qquad \cdots ②$$

となる。 ② を変形すると

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{\boxed{\text{C}}}(b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

となるから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}}\right)^{n-\boxed{\text{D}}} (b_2 - b_1) \quad (n = 2, 3, \cdots) \qquad \cdots ③$$

が成り立つ。

ここで, $b_1 = \boxed{\text{E}}$, $b_2 = \boxed{\text{F}}$ であるから, ③ より

$$b_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}}\right)^{k-\boxed{\text{G}}}$$

を得る。よって

$$b_n = \boxed{\text{H}} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}}\right)^{n-\boxed{\text{I}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\text{JKL}}$$

である。

$\boxed{\text{III}}$

2次方程式 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ の2つの解を α, β とする。ただし, $0<\arg\alpha<\arg\beta<2\pi$ である。このとき, 次の3つの条件を満たす複素数 z を考える。

$$\begin{cases} \arg\dfrac{\alpha-z}{\beta-z}=\dfrac{\pi}{2} & \cdots \text{①} \\ (1+i)z+(1-i)\bar{z}+k=0 & \cdots \text{②} \\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi & \cdots \text{③} \end{cases}$$

ただし,k は実数とする。

また, 複素数平面上で α, β, z を表す点をそれぞれ A, B, P とおく。

(1) α, β の偏角は

$$\arg\alpha=\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi, \quad \arg\beta=\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\pi$$

である。

(2) ① より, $\boxed{\text{E}}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから, 点 P は中心 $-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{F}}}}{\boxed{\text{G}}}$, 半径 $\dfrac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ の円周上にある。

また, ② より, 点 P は傾きが $\boxed{\text{J}}$ であり, 虚軸との交点が $\dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}ki$ であるような直線の上にある。

以上より, ①, ②, ③ を同時に満たす複素数 z の個数を n とすると, n の最大値は $\boxed{\text{M}}$ であり, そのときの k の値の範囲は

$$\boxed{\text{N}}+\sqrt{\boxed{\text{O}}}<k<\sqrt{\boxed{\text{P}}}+\sqrt{\boxed{\text{Q}}}$$

である。ただし, $\boxed{\text{P}}<\boxed{\text{Q}}$ とする。ただし, 空欄 $\boxed{\text{E}}$ は以下の ⓪ ～ ② から選べ

⓪ $\angle$PAB　① $\angle$PBA　② $\angle$APB

$\boxed{\text{IV}}$

問 1　x が不等式

$$2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \leqq 0 \cdots ①$$

を満たすとき, 関数

$$f(x) = (\log_3 x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{9}\right) \qquad \cdots ②$$

の最大値を求めよう。

① を満たす x の値の最大値は

$$\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}} \leqq x \leqq \boxed{\text{CD}}$$

である。

ここで, $\log_3 x = t$ とおくと, t のとる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}} \leqq t \leqq \boxed{\text{G}}$$

である。

また, ② の右辺を t で表して, その式が表す関数を $g(t)$ とおくと, その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\text{H}}\,t^2 - \boxed{\text{I}}\,t + \boxed{\text{J}}$$

である。したがって, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{KL}}$ で最大値 $\boxed{\text{M}}$ をとる。

問 2　$a > 0$ とする。曲線 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ と x 軸および x 軸上の点 A$(a, 0)$ を通る直線 $x = a$ で囲まれた部分を, x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

(1) V は a の関数として

$$V = -\frac{\pi}{4}\left\{\left(\boxed{\text{N}}\,a + \boxed{\text{O}}\right)e^{-\boxed{\text{P}}a} - \boxed{\text{Q}}\right\}$$

と表される。

(2) 点 A は原点を出発して, x 軸上を正の方向に移動し, その t 秒後の速度を $4t$ とする。このとき, t 秒後の V の変化率を求めると

$$\frac{dV}{dt} = \boxed{\text{R}}\,\pi t^{\boxed{\text{S}}}e^{-\boxed{\text{T}}t^{\boxed{\text{U}}}}$$

である。また, この変化率が最も大きくなるのは

$$t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{V}}}}{4}$$

のときで, そのときの V の値は

$$V = -\frac{\pi}{8}\left(\boxed{\text{W}}\,e^{-\frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}} - \boxed{\text{Z}}\right)$$

である。