$\boxed{\text{I}}$

問１　x の２次関数

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。関数①のグラフの頂点の座標を (p, q) とすると

$$p = \boxed{\textbf{A}}\,a, \quad q = \boxed{\textbf{B}}\,a^2 + b$$

である。

(1) 点 (p, q) が直線 $x + y = 1$ の上を動くとき，a, b は

$$b = \boxed{\textbf{CD}}\,a^2 - \boxed{\textbf{E}}\,a + \boxed{\textbf{F}}$$

を満たす。

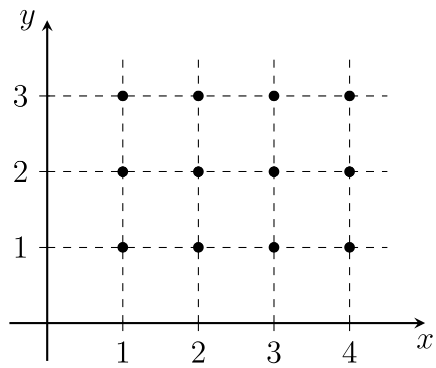
このとき，$8a + b$ は $a = \boxed{\textbf{G}}$ で最大値 $\boxed{\textbf{H}}$ をとる。

(2) 関数①のグラフが x 軸に接するとき，$a + b$ の値の範囲は

$$a + b \leqq \frac{\boxed{\textbf{I}}}{\boxed{\textbf{J}}}$$

である。

問 2　座標平面上に，右の図のように 12 個の点が並んでいる。これらの点から 3 この点を選び，それらを頂点とする三角形を作る。このとき，三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず，12 個の点から 3 個の点を選び出す場合の数は $\boxed{\text{KLM}}$ 通りである。

次に，12 個の点のうち，3 個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。

このような直線のうち

(1) 4 点を通る直線は $\boxed{\text{N}}$ 本ある。

(2) 3 点を通る直線は $\boxed{\text{O}}$ 本ある。

したがって，同一直線上にあり，三角形の頂点とならない 3 点の組み合わせは，1 の場合は $\boxed{\text{PQ}}$ 通りあり，2 の場合は $\boxed{\text{R}}$ 通りある。

以上より，求める三角形は $\boxed{\text{STU}}$ 個である。

特に，点 $(1,1)$ を A，点 $(4,1)$ を B とするとき，線分 AB 上に 2 つの頂点をもつ三角形は $\boxed{\text{VW}}$ 個である。

$\boxed{\text{II}}$

問 1　三角形 ABC は

$$\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{BC}=3,\quad \mathrm{CA}=4$$

を満たしている。

(1) $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とすると, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\textbf{AB}}\cos\theta$$

である。また, 余弦定理より $\cos\theta$ の値を求めて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{\boxed{\textbf{C}}}{\boxed{\textbf{D}}}\qquad\cdots①$$

を得る。

(2) 辺 BC を n 等分する点を B から近い順に $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$ とおき, $B=P_0, C=P_n$ とおく。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}_k$ を求めよう。

まず, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}_k$ の内積を①を用いて計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}_k=\boxed{\textbf{E}}+\frac{\boxed{\textbf{F}}\,k-\boxed{\textbf{G}}}{2n}+\frac{\boxed{\textbf{H}}\,(k^2-k)}{n^2}$$

である。

したがって,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{AP}}_{k-1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}_k=\frac{\boxed{\textbf{IJ}}}{\boxed{\textbf{K}}}$$

となる。

問 2　複素数 z が条件

$$z\bar{z} - (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} \leqq 15 \qquad ①$$

を満たすとする。

(1) 複素数平面上で不等式①があらわす図形は, 中心 $\boxed{\textsf{L}} + \boxed{\textsf{M}}\,i$, 半径 $\boxed{\textsf{N}}\sqrt{\boxed{\textsf{O}}}$ の円の内部および円周である。

(2) 直線 $(1-i)z - (1+i)\bar{z} = 2i$ 上にあり, 不等式①を満たすすべての複素数 z の中で, $|z|$ が最大であるものを z_1, $|z|$ が最小であるものを z_2 で表すと

$$z_1 = \sqrt{\boxed{\textsf{PQ}}} + \boxed{\textsf{R}} + \left(\sqrt{\boxed{\textsf{ST}}} + \boxed{\textsf{U}}\right)i,$$

$$z_2 = -\frac{\boxed{\textsf{V}}}{\boxed{\textsf{W}}} + \frac{\boxed{\textsf{X}}}{\boxed{\textsf{Y}}}i$$

である。

$\boxed{\text{III}}$ 次の 4 つの条件を満たす実数 x, y, t, u を考える。

$$y \geqq |x| \qquad ①$$

$$x + y = t \qquad ②$$

$$x^2 + y^2 = 12 \qquad ③$$

$$x^3 + y^3 = u \qquad ④$$

このとき，t および u がとる値の範囲を求めよう。

(1) ①,③より，点 (x, y) は原点を中心とする半径 $\boxed{\mathbf{A}}\sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}$ の四分円の弧の上にあり，弧の両端の点の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{\mathbf{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathbf{D}}}\right), \quad \left(\sqrt{\boxed{\mathrm{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathrm{D}}}\right)$$

である。このことと②により，t がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathbf{E}} \leqq t \leqq \boxed{\mathbf{F}}\sqrt{\boxed{\mathbf{G}}} \qquad ⑤$$

次に②,③より

$$xy = \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}\left(t^2 - \boxed{\mathbf{JK}}\right)$$

を得る。さらに，④を用いて

$$u = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}\left(\boxed{\mathbf{NO}}\,t - t^3\right)$$

を得る。

したがって

$$\frac{du}{dt} = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}\left(\boxed{\mathbf{RS}} - t^2\right)$$

であるから，⑤の範囲において u がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathbf{T}} \leqq u \leqq \boxed{\mathbf{UV}}\sqrt{\boxed{\mathbf{W}}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$

$a > 1$ とする。2 つの不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leqq y \leqq a\cos 3x$$

で表される領域を直線 $y = 1$ で 2 つの部分に分ける。そのうち，$y \geqq 1$ の部分の面積を S，$y \leqq 1$ の部分の面積を T とおく。このとき，$T - S$ を最大にする a の値と，$T - S$ の最大値を求めよう。

等式 $a\cos 3x = 1$ を満たす $x\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}\right)$ の値を t とおく。このとき

$$S = \frac{\sin 3t}{\boxed{\mathbf{A}}\ \cos 3t} - t$$

$$S + T = \frac{1}{\boxed{\mathbf{B}}\ \cos 3t}$$

である。したがって，$f(t) = T - S$ とおくと

$$f'(t) = \frac{\left(\boxed{\mathbf{C}} - \boxed{\mathbf{D}}\ \sin 3t\right)\sin 3t}{\cos^{\boxed{\mathbf{E}}} 3t}$$

であるから，$T - S$ は $t = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathbf{FG}}}$ のとき最大となる。すなわち，$a = \dfrac{\boxed{\mathbf{H}}\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}}{\boxed{\mathbf{J}}}$ のとき，$T - S$ は最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\mathbf{K}}}$ をとる。