$\boxed{\text{I}}$

問1 $P = 10a^2 + 14ab - 21bc - 15ca$ とする。

(1) P を因数分解すると

$$P = \left(\boxed{\mathsf{A}}\,a + \boxed{\mathsf{B}}\,b\right)\left(\boxed{\mathsf{C}}\,a - \boxed{\mathsf{D}}\,c\right)$$

である。

(2) $5a = \sqrt{6}, 14b = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}, 15c = \sqrt{12} - \sqrt{8}$ とすると

$$P = \frac{\boxed{\mathsf{E}} + \boxed{\mathsf{F}}\sqrt{\boxed{\mathsf{G}}}}{\boxed{\mathsf{H}}}$$

である。このとき、P より小さい整数の中で最も大きいものは $\boxed{\mathsf{I}}$ である。

問2 2つの袋 A, B がある。A の袋には白球が4個、赤球が1個入っており、B の袋には白球が2個、赤球が3個入っている。はじめに A の袋から同時に2個の球を取出し、続いて B の袋から同時に2個の球を取り出す。

(1) A から2個の白球を取出し、B からは白球と赤球をそれぞれ1個ずつ取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{KL}}}$ である。

(2) 取り出した4個の球の中に、3個の白球と1個の赤球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}$ である。

(3) 取り出した4個の球がすべて同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(4) 取り出した4個の球の中に含まれる白球が2個以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{TU}}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$

問1　2つのベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $60°$ であり、$|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ とする。また、実数 x に対して、$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ とする。$x > 1$ のとき、$\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ のなす角が $30°$ となるような x の値を求めよう。以下、$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ は $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{v}$ の内積を表し、$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表す。

　まず、ベクトル $\overrightarrow{u}$ と $\overrightarrow{u}$ のなす角は $30°$ であるから

$$(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \frac{\boxed{\textsf{A}}}{\boxed{\textsf{B}}} |\overrightarrow{u}|^2 |\overrightarrow{v}|^2$$

を得る。$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \boxed{\textsf{C}}$ であることに注意して、この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\textsf{DE}}\, x^2 + \boxed{\textsf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\textsf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\textsf{I}}\, x\right)^2$$

を得る。

　したがって、$x > 1$ に注意して, これを解くと

$$x = \boxed{\textsf{J}} + \sqrt{\boxed{\textsf{KL}}}$$

となる。

問 2　複素平面上で,z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1) 上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\textsf{M}}} k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので, 図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\textsf{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\textsf{O}}}\, x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\textsf{P}}}\, x$$

で表される 3 直線である。

(2) C 上に $|z - 1 - i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき、r の値は

$$r = \frac{\sqrt{\boxed{\textsf{Q}}} - \boxed{\textsf{R}}}{\boxed{\textsf{S}}}$$

となる。また、そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\textsf{T}} + \sqrt{\boxed{\textsf{R}}}}{\boxed{\textsf{V}}} \left(1 + \sqrt{\boxed{\textsf{W}}}\, i\right)$$

である。

$\boxed{\text{III}}$

3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx + \frac{2}{3}$$

の区間 $x \leqq 4$ における最大値が 6 より大きくなるような実数 t の値の範囲を求めよう。

まず、$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = (x - \boxed{\textbf{A}})(x - t)$$

であるから、t の値の範囲を次のように分けて考える。

(1) $t > \boxed{\textbf{A}}$ のとき、$f(x)$ は $x = \boxed{\textbf{A}}$ で極大、$x = t$ で極小になる。また、$f(4) = \boxed{\textbf{B}}$ であるから、$f(\boxed{\textbf{A}}) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

(2) $t = \boxed{\textbf{A}}$ のとき、区間 $x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $f(\boxed{\textbf{C}}) = \boxed{\textbf{D}}$ となり、条件は満たされない。

(3) $t < \boxed{\textbf{A}}$ のとき、$f(x)$ は $x = t$ で極大, $x = \boxed{\textbf{A}}$ で極小となる。

また,$f(4) = \boxed{\textbf{B}}$ であるから,$f(t) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

ここで、

$$f(t) = 6 = -\frac{1}{6}\left(t + \boxed{\textbf{E}}\right)\left(t - \boxed{\textbf{F}}\right)^2$$

であることに注意する。

以上より、求める t の値の範囲は

$$t > \frac{\boxed{\textbf{GH}}}{\boxed{\textbf{I}}} \qquad \text{または} \qquad t < \boxed{\textbf{JK}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

を考える。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\textbf{A}}\ \cos x - \boxed{\textbf{B}}}{\left(\boxed{\textbf{C}} - \boxed{\textbf{D}}\right)^2}$$

である。したがって, 関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を α とおくと

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\textbf{E}}}{\boxed{\textbf{F}}}$$

である。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分は直線 $x = \alpha$ によって 2 つの部分に分けられる。その左側の部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \int_{\frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}}^{\boxed{\text{I}}} \frac{dt}{\boxed{\textbf{J}} - \boxed{\textbf{K}}\ t} = \frac{\boxed{\textbf{L}}}{\boxed{\textbf{M}}} \log \frac{\boxed{\textbf{N}}}{\boxed{\textbf{O}}}$$

である。

また、右側の部分の面積を S_2 とおくと

$$S_2 = \frac{\boxed{\textbf{P}}}{2} \log \boxed{\textbf{Q}}$$

である。